(19)雑音によって誘起される相転移(基研長期研究計画「非線型非平衡状態の統計力学」,研究会報告)

北原, 和夫; 稲葉, 豊

(19)　雑音によって誘起される相転移

静岡大・教養　北　原　和　夫
東大・理　　　稲　葉　　　豊

最近，非線型系に対する外部雑音の影響について実験,[1), 2)] 理論[3)〜8)] の両方の研究が行われてきている。特に興味を持たれているのは，雑音が相乗的な場合で，雑音のない場合と比べると定性的に異なる振舞いを引起すことがある。従来，理論的に取扱われてきたのは，雑音がガウス過程でかつ白色の場合である。[3)〜5)] 一変数 x_t で記述される系があって，雑音 I_t の存在のもとに,

$$\dot{x}_t = f(x_t) + g(x_t)\, I_t \tag{1}$$

という方程式に従って発展するものとする。 I_t がガウス過程で

$$< I_t I_{t'} > = 2D\delta(t - t') \tag{2}$$

ならば，時刻 t に値 x をとる確率 $P(x, t)$ は Fokker-Planck 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x,t) = \left[-\frac{\partial}{\partial x} f(x) + D \frac{\partial}{\partial x} g(x) \frac{\partial}{\partial x} g(x) \right] P(x,t) \tag{3}$$

に従い，その定常分布 $P_{st}(x)$ を一般的に求めることができる。

雑音 I_t が白色でない場合の最も簡単な模型は二準位雑音で 減衰速度 γ で記憶を失うものである。即ち $I_t = \varDelta$ または $-\varDelta$ で，かつ

$$< I_t I_{t'} > = \varDelta^2 \mathrm{e}^{-\gamma |t-t'|} \;. \tag{4}$$

時刻 t に雑音が準位 $\alpha\varDelta$ (α は＋または－)にあり，系が状態 x にある確率 $P_\alpha(x, t)$ とおくと，それの満たす方程式は,

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} P_+(x,t) \\ P_-(x,t) \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} P_+(x,t) \\ P_-(x,t) \end{bmatrix} \tag{5}$$

となる。[9] ここで作用素Lは行列の形をしていて，

$$L=\begin{bmatrix} -\dfrac{\partial}{\partial x}\{f(x)+\Delta g(x)\}-\dfrac{\gamma}{2}, & \dfrac{\gamma}{2} \\ \dfrac{\gamma}{2}, & -\dfrac{\partial}{\partial x}\{f(x)-\Delta g(x)\}-\dfrac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \tag{6}$$

である。xの確率分布は

$$P(x,t)=P_{+}(x,t)+P_{-}(x,t) \tag{7}$$

で与えられ，その定常分布$P_{st}(x)$は

$$P_{st}(x)\propto\frac{g(x)}{\Delta^2[g(x)]^2-[f(x)]^2}\ \exp\left[\gamma\int^x dx'\frac{f(x')}{\Delta^2[g(x')]^2-[f(x')]^2}\right] \tag{8}$$

となる。[7] この公式をVerhulstの人口の模型

$$\dot{x}_t=(\lambda+I_t)x_t-x_t^2 \tag{9}$$

に応用すると，$\lambda+\Delta=\gamma/2$，$\lambda-\Delta=\gamma/2$，及び$\Delta^2-\lambda^2=\gamma\lambda$のおのおのが満たされるところを境にして$P_{st}(x)$の形が定性的に変化することが判る。これを一種の相転移とみなした時，これらの境のところで揺らぎxの動的性質にどのような異常があらわれるか，という疑問が生じる。

動的性質を知るには，固有値問題

$$L\phi_n=-\mu_n\phi_n \tag{10}$$

を解けばよい。$\mu_0=0$は定常分布に対応し，0でない最小値μ_1が揺らぎの減衰速度を与える。固有関数を

$$\phi_n=\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} \tag{11}$$

とおくと，

$$[\mu_n-\frac{\gamma}{2}-\frac{d}{dx}(f-\varDelta g)][\mu_n-\frac{\gamma}{2}-\frac{d}{dx}(f+\varDelta g)]u_n=(\frac{\gamma}{2})^2u_n \tag{12}$$

がなりたち，変数変換

$$z=\frac{(\lambda^2-\varDelta^2-\lambda x)}{\varDelta x}, \tag{13}$$

$$w_n=\frac{u_n}{(\lambda+\varDelta z)^2} \tag{14}$$

を行うと，w_n は Jacobi の多項式で与えられる,[10)]

$$w_n(z)=(1-z)^{\alpha_n}(1+z)^{\beta_n}P_n^{(\alpha_n,\beta_n)}(z). \tag{15}$$

ここで,

$$\alpha_n=-\frac{\mu_n-\frac{\gamma}{2}}{\lambda-\varDelta}, \tag{16}$$

$$\beta_n=-\frac{\mu_n-\frac{\gamma}{2}}{\lambda+\varDelta}-1. \tag{17}$$

従って，固有値 μ_n は,

$$\mu_n^2-(\gamma+2\lambda n)\mu_n+\gamma\lambda n+n^2(\lambda^2-\varDelta^2)=0 \tag{18}$$

で与えられる。($n=0,1,2,\cdots$) たとえば，$\mu_0=0$,

$$\mu_1=\frac{1}{2}[\gamma+2\lambda-\sqrt{\gamma^2+4\varDelta^2}], \tag{19}$$

などとなる。[11)]明らかに $\varDelta^2-\lambda^2=\gamma\lambda$ のところで $\mu_1=0$ となっているから，定常分布 $P_{st}(x)$ の転移点 $\varDelta^2-\lambda^2=\gamma\lambda$ では，揺ぎの減衰も遅くなっていることになる。

このように，いわゆる“雑音によって誘起される相転移”において，critical slowing-down も生じ得るのである。

文　献

1) S. Kabashima and T. Kawakubo, Phys. Lett. **70A** (1979), 375.

2) P. De Kepper and W. Horsthemke, C. R. Acad. Sci. **C287** (1978), 251.

3) W. Horsthemke and M. Malek-Mansour, Z. Physik **B24** (1976), 307.

4) L. Arnold, W. Horsthemke and R. Lefever, Z. Physik **B29** (1978), 367.

5) A. Schenzle and H. Brand, Phys. Lett. **69A** (1979), 313.

6) J. M. Sancho and San Miguel, to be published.

7) K. Kitahara, W. Horsthemke and R. Lefever, Phys. Lett. **70A** (1979), 377.

8) H. Matsuda and K. Ishii, J. Math. Biol., submitted.

9) R. Kubo, Fluctuations, Relaxations and Resonance in Magnetic Systems, ed. by D. Ter Harr (Oliver and Boyd, Edinburgh, 1962).

10) M. Abramowitz and I. A. Segun (ed), Handbook of Mathematical Functions (Dover, New York, 1969).

11) K. Kitahara and Y. Inaba, Prog. Theor. Phys., submitted.